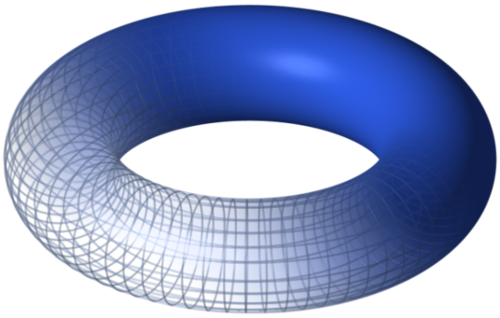
Torus



Torus

Ein **Torus** (Plural *Tori*; von lateinisch *torus* ‚Wulst')[1] ist ein mathematisches Objekt aus der Topologie. Er ist eine "wulstartig geformte" Fläche mit einem "Loch", die also die Gestalt eines Rettungsrings, Reifens oder Donuts hat.

Spezielle Beispiele im dreidimensionalen Raum eingebetteter Tori sind die **Rotationstori**, die Beispiele für Rotationsflächen sind. Man erhält sie, indem man einen Kreis um eine Achse rotieren lässt. Es handelt sich also um die Menge der Punkte, die von einer Kreislinie mit Radius R den festen Abstand r haben, wobei $r < R$ sein muss. Falls man nicht nur den Kreis, sondern die gesamte Kreisfläche rotieren lässt, erhält man einen **Volltorus**.

Eine andere Möglichkeit der Konstruktion eines Torus ist durch Identifizieren der Seiten eines Rechtecks. Dabei wird die rechte Kante des Rechtecks mit seiner linken Kante und die obere mit der unteren Kante verheftet. Diese Topologie benutzen auch viele Computerspiele: Verlässt ein Spielobjekt auf einer Seite das Spielfeld, so taucht es auf der gegenüberliegenden Seite wieder auf.

Beide Konstruktionen sind Spezialfälle der allgemeinen mathematischen Definition, die einen Torus als das topologische Produkt zweier Kreise definiert. **Rotationstori** liefern eine konkrete (rotationssymmetrische) Realisierung dieser Fläche im dreidimensionalen euklidischen Raum. Für viele Anwendungen in Theoretischer Mathematik und Physik bedeutend ist eine andere Einbettung als **flacher Torus** in den vierdimensionalen Raum. Diese hat die Krümmung null und die maximal mögliche Symmetrie.

Der Torus ist eine zweidimensionale Fläche. Allgemeiner betrachtet man in der Mathematik auch den n-Torus, eine den 2-dimensionalen Torus verallgemeinernde n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Davon abweichend finden sich in der deutschsprachigen Literatur gelegentlich auch die Bezeichnungen Doppeltorus, Tripeltorus etc. für Flächen mit zwei, drei und mehr Löchern.

1 Definition

Mit $\mathbb{S}^1$ werde der Kreis (oder 1-Sphäre) bezeichnet. Der n -Torus ist dann definiert durch

$$\mathbb{T}^n := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ mal}}$$

wobei $\times$ das Produkt topologischer Räume meint. Der 2-Torus wird meist einfach Torus genannt.[2]

2 Eigenschaften

2.1 Struktur einer Mannigfaltigkeit

Der n -Torus ist eine topologische Mannigfaltigkeit. Dies folgt aus der Tatsache, dass der n -Torus das topologische Produkt aus n 1-Sphären ist und die 1-Sphäre selbst eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Die 1-Sphäre ist zusätzlich auch eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und, da das Produkt differenzierbarer Mannigfaltigkeiten wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ergibt, ist der n -Torus ebenfalls eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.[3] Die Dimension von $\mathbb{T}^n$ ist gerade n .

2.2 Topologische Eigenschaften

Ebenfalls direkt aus der Definition folgt, dass der n-Torus kompakt ist. Außerdem ist er wegzusammenhängend. Im Gegensatz zur n-Sphäre ist der n-Torus nicht einfach zusammenhängend.

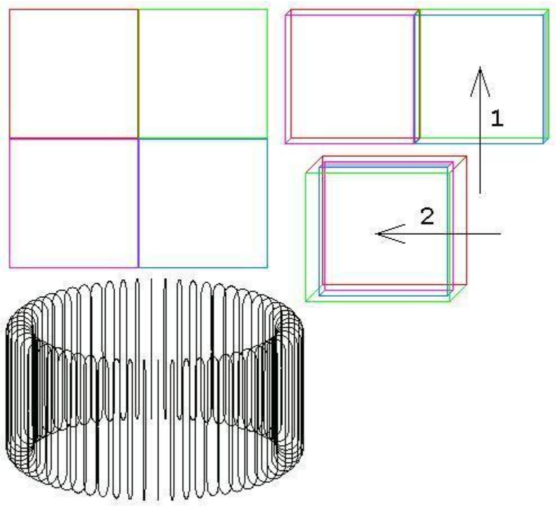
Die Abbildung $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ definiert durch $(x_j)_j := (\exp(2\pi \mathrm{i} x_j))_j$ ist die universelle Überlagerung des n-Torus.[4]

2.3 Lie-Gruppe

Die 1-Sphäre aufgefasst als Kreisgruppe ist außerdem eine Lie-Gruppe. Da auch das Produkt mehrerer Lie-Gruppen mit der komponentenweisen Multiplikation wieder eine Lie-Gruppe ist, ist auch der n -Torus eine Lie-Gruppe.[5]

3 Eingebettete Tori

3.1 Flache Tori

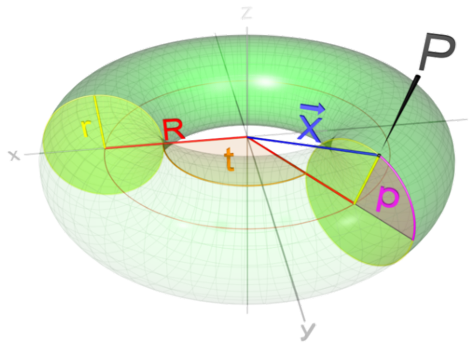


Modell eines flachen Torus: Das Papier muss nur gebogen, nicht gestreckt werden.

Da die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ offensichtlich in den $\mathbb{R}^2$ eingebettet werden kann, kann der n-Torus $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^{2n}$ als Teilmenge des euklidischen Raums $\mathbb{R}^{2n}$ aufgefasst werden. Man betrachtet auf $\mathbb{T}^n$ die riemannsche Metrik g , die durch die euklidische Metrik des Raums $\mathbb{R}^{2n}$ auf dem n-Torus induziert wird. Diese Metrik g ist flach, das heißt der n-Torus ist lokal isometrisch zu einer Umgebung des $\mathbb{R}^n$.[6] Insbesondere ist seine Schnittkrümmung daher überall konstant null. Da der der n-Torus kompakt und somit auch vollständig ist, ist er eine flache Mannigfaltigkeit. Man spricht daher auch von einem flachen n-Torus.

Es gibt neben der oben beschriebenen noch weitere flache Metriken auf dem Torus. Flache 2-Tori können beschrieben werden durch ein Parallelogramm, dessen gegenüberliegende Seiten zusammengeklebt werden. Äquivalent dazu können flache Tori als topologische Faktorgruppen $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \cdot v + \mathbb{Z} \cdot w)$ für zwei linear unabhängige Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ beschrieben werden. Im Spezialfall $v = (1, 0)$ und $w = (0, 1)$ erhält man den Quotienten $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$.

Elliptische Kurven über den komplexen Zahlen lassen sich mittels der Weierstraßschen Parametrisierung als $\mathbb{C}/L$ für ein Gitter $L \subset \mathbb{C}$ darstellen und sind dadurch (mit einer translationsinvarianten Metrik) Beispiele für flache Tori. Der Modulraum der elliptischen Kurven oder äquivalent der flachen 2-Tori ist die sogenannte Modulkurve.



Ein Rotationstorus

3.2 Rotationstori

→ *Hauptartikel: Rotationstorus*

Ein Rotationstorus ist ein eingebetteter 2-Torus, der als Menge der Punkte beschrieben werden kann, die von einer Kreislinie mit Radius R den festen Abstand r haben, wobei $r < R$ ist.

In Koordinaten:

$$x(u, v) = (R + r \cos v) \cos u$$

$$y(u, v) = (R + r \cos v) \sin u$$

$$z(u, v) = r \sin v$$

für $0 \leq u, v < 2\pi$.

Er ist ein Beispiel für eine Rotationsfläche.

3.3 Clifford-Tori

Ein Clifford-Torus ist ein spezieller in $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ eingebetter Torus. Nach der Identifizierung $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ und $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \mid z \mid^2 + \mid w \mid^2 = 1\}$ lässt sich der Standard-Cliffordtorus beschreiben als

$$T := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \mid z \mid = \mid w \mid = 1\} \subset S^3$$

Weiterhin werden die Bilder von T unter Isometrien der Standard-Metrik $A \in O(3) = Isom(S^3)$ als Clifford-Tori bezeichnet.

Mittels stereographischer Projektion kann man Clifford-Tori auch als in den $\mathbb{R}^3$ eingebettete Tori auffassen.

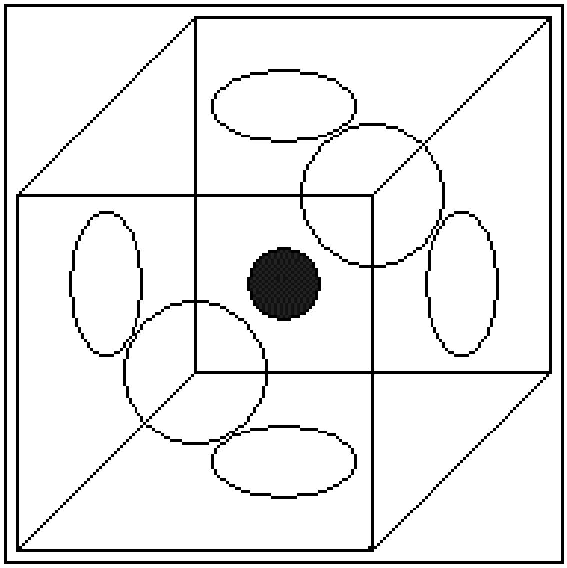
Ein Clifford-Torus ist eine Minimalfläche bzgl. der Standard-Metrik auf der S^3 . Die von Brendle bewiesene Lawson-Vermutung besagt, dass jeder als Minimalfläche in die S^3 eingebettete Torus ein Clifford-Torus ist.

4 Volltorus

Ein *Volltorus* ist ein Henkelkörper vom Geschlecht $g = 1$.

Topologisch ist ein Volltorus homöomorph zum Produkt $D^2 \times S^1$ der Kreisscheibe mit der Kreislinie. Man kann den Volltorus als rotationssymmetrischen Volltorus in den $\mathbb{R}^3$ einbetten.

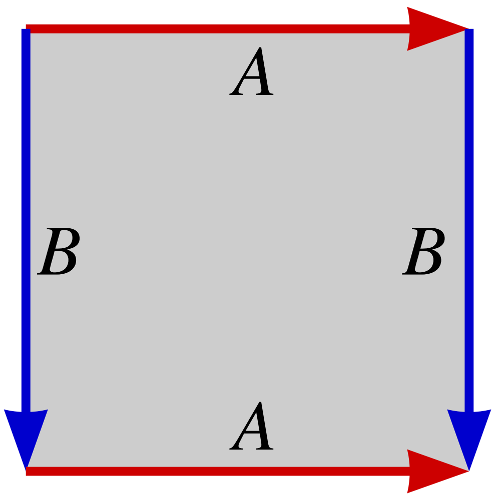
Die 3-Sphäre, also der dreidimensionale Raum zusammen mit einem unendlich fernen Punkt, lässt sich als Vereinigung zweier Volltori darstellen, die sich lediglich in ihrer Oberfläche überlappen. Man erhält sie beispielsweise aus der Hopf-Faserung, indem man den Basisraum S^2 als Vereinigung von Nord- und Südhalbkugel auffasst; über beiden Hälften ist die Faserung trivial. Die Zerlegung der 3-Sphäre in zwei Volltori wird beispielsweise bei der Konstruktion der Reeb-Blätterung ausgenutzt.



Eigenschaften des 3-Torus

5 Konstruktion aus einem Quadrat oder Würfel

5.1 Konstruktion zweidimensionaler Tori aus einem Quadrat oder Parallelogramm



Den Torus erhält man aus einem Quadrat durch Verkleben gegenüberliegender Seiten.

Im Gegensatz zur Oberfläche einer Kugel kann der Torus ohne Singularitäten auf einer ebenen, rechteckigen Fläche abgebildet werden.

Dabei wird die rechte Kante des Rechtecks oder Quadrats mit seiner linken Kante verheftet und seine untere Kante wird mit seiner oberen Kante verheftet. (Diese Konstruktion funktioniert auch mit einem beliebigen Parallelogramm.) Diese Topologie besitzen auch viele Computerspiele, zum Beispiel Asteroids oder Pacman: Verlässt ein Spielobjekt auf einer Seite das Spielfeld, so taucht es auf der gegenüberliegenden Seite wieder auf.

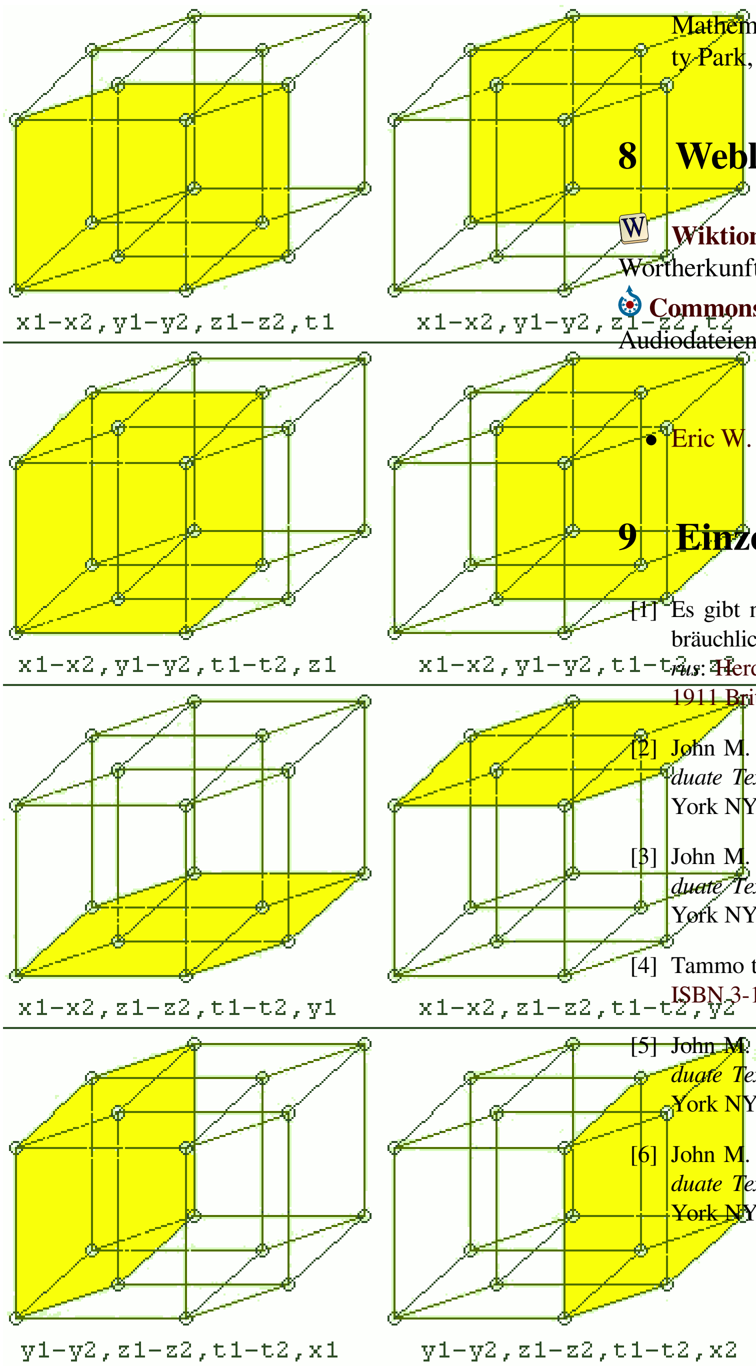
5.2 Konstruktion höherdimensionaler Tori aus einem Würfel oder Parallelepiped

Beim dreidimensionalen Torus oder 3-Torus handelt es sich um einen Quader oder Würfel, dessen sechs gegenüberliegende Flächen paarweise miteinander verheftet sind.

Beim vierdimensionalen Torus oder 4-Torus handelt es sich um einen Tesserakt, dessen acht gegenüberliegende Würfel paarweise miteinander verheftet sind.

Allgemein ist der n -dimensionale Torus ein n-dimensionaler Würfel $[0,1]^n$, dessen gegenüberliegende (n-1)-Hyperwürfel paarweise miteinander identifiziert sind. Man kann ihn auch als $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ darstellen.

Auch hier kann man statt eines n-dimensionalen Würfels ein beliebiges n-dimensionales Parallelepiped verwenden, um durch Identifizieren der Seiten einen n-dimensionalen Torus zu konstruieren.



6 Siehe auch

- Torusknoten
- Stanford-Torus

7 Literatur

- Anatole Katok; Vaughn Climenhaga: *Lectures on surfaces. (Almost) everything you wanted to know about them.* Student Mathematical Library, 46. American Mathematical Society, Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2008. ISBN 978-0-8218-4679-7

8 Weblinks

- **Wiktionary: Torus** – Bedeutungserklärungen, Wortherkunft, Synonyme, Übersetzungen
- **Commons: Torus** – Album mit Bildern, Videos und Audiodateien

- Eric W. Weisstein: *Torus.* In: *MathWorld* (englisch).

9 Einzelnachweise

[1] Es gibt noch eine Reihe weiterer heute nicht mehr gebräuchlicher historischer Verwendungen des Begriffs *Torus*: Herder 1854 Pierer 1857 Meyers 1905 Brockhaus 1911 Britannica 1911.

[2] John M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds* (= *Graduate Texts in Mathematics* 218). Springer-Verlag, New York NY u. a. 2003, ISBN 0-387-95448-1, S. 8.

[3] John M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds* (= *Graduate Texts in Mathematics* 218). Springer-Verlag, New York NY u. a. 2003, ISBN 0-387-95448-1, S. 21.

[4] Tammo tom Dieck: *Topologie.* de Gruyter, Berlin, 2000, ISBN 3-11-016236-9, S. 52.

[5] John M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds* (= *Graduate Texts in Mathematics* 218). Springer-Verlag, New York NY u. a. 2003, ISBN 0-387-95448-1, S. 39.

[6] John M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds* (= *Graduate Texts in Mathematics* 218). Springer-Verlag, New York NY u. a. 2003, ISBN 0-387-95448-1, S. 289.

10 Text- und Bildquellen, Autoren und Lizenzen

10.1 Text

- **Torus** *Quelle:* http://de.wikipedia.org/wiki/Torus?oldid=133764948 *Autoren:* Ulrich.fuchs, Aresch, Dishayloo, Reinhard Kraasch, Tkarcher, Rolz-reus, Honina, Karl Bednarik, Kubieziel, Zwobot, Weialawaga, Karl-Henner, Boehm, RokerHRO, Priwo, °, Martin-vogel, Ot, P. Birken, Weede, SiriusB, Benji, Matthy, Tullinge, Michail, Gimps.de-team, Oracle of Truth, Abdull, Lustiger seth, Qubric, Taxiarchos228, SKopp, Webograph, HCvBothmer, Lefou, Allen McC., Laza, FlaBot, Jörg Knappen, Yonatan, Silenus, Scooter, DALIBRI, Gunther, RobotE, Mkill, STBR, RobotQuistnix, Bota47, Tsca.bot, YurikBot, Joey Eragon, Revvar, 217.125.121.169, Bwarken, Korinth, BlueCücü, Saippuakauppias, UvM, Edoe, DemonDeLuxe, Ampfinger, Thijs!bot, Jobu0101, Horst Gräbner, JAnDbot, Frankee 67, Vicious!, Numbo3, Cosine, VolkovBot, TXiKiBoT, Lipedia, DimaS, Idioma-bot, Entlinkt, DaBot, Loveless, V.R.S., Chricho, Alexkin, Christian1985, W.bars, Tztzq, Raphael Frey, FerdiBf, Wikinger08, Luckas-bot, Orthograf, GrouchoBot, Rubinbot, Obersachsebot, Xqbot, ArthurBot, Howwi, RibotBOT, 24karamea, Quartl, High&co, D'ohBot, EmausBot, ZéroBot, Randolph33, MerlIwBot, HilberTraum, .gs8, Suhagja, Café Bene, Kappalacha und Anonyme: 62

10.2 Bilder

- **Datei:Commons-logo.svg** *Quelle:* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4a/Commons-logo.svg *Lizenz:* Public domain *Autoren:* This version created by Pumbaa, using a proper partial circle and SVG geometry features. (Former versions used to be slightly warped.) *Originalkünstler:* SVG version was created by User:Grunt and cleaned up by 3247, based on the earlier PNG version, created by Reidab.
- **Datei:Disambig-dark.svg** *Quelle:* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ea/Disambig-dark.svg *Lizenz:* CC-BY-SA-3.0 *Autoren:* Original Commons upload as Logo Begriffsklärung.png by Baumst on 2005-02-15 *Originalkünstler:* Stephan Baum
- **Datei:FLSCFLZ3_Flach_Schlauch_Flach_Zylinder.jpg** *Quelle:* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/de/d/d6/FLSCFLZ3_Flach_Schlauch_Flach_Zylinder.jpg *Lizenz:* ? *Autoren:*

  Gezeichnet am 27. Juni 2004

  Originalkünstler:

  Benutzer:Karl Bednarik
- **Datei:Torus.png** *Quelle:* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/17/Torus.png *Lizenz:* Public domain *Autoren:* ? *Originalkünstler:* ?
- **Datei:TorusAsSquare.svg** *Quelle:* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f2/TorusAsSquare.svg *Lizenz:* Public domain *Autoren:* ? *Originalkünstler:* ?
- **Datei:Torus_3d.png** *Quelle:* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/63/Torus_3d.png *Lizenz:* CC-BY-SA-3.0 *Autoren:* Eigenes Werk *Originalkünstler:* DemonDeLuxe (Dominique Toussaint)
- **Datei:VIDITO-2_vierdimensionaler_Torus.gif** *Quelle:* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6f/VIDITO-2_vierdimensionaler_Torus.gif *Lizenz:* CC-BY-SA-3.0 *Autoren:* Transferred from de.wikipedia; transferred to Commons by User:Ireas using CommonsHelper.
  Originalkünstler: Benutzer:Karl Bednarik. Original uploader was Karl Bednarik at de.wikipedia
- **Datei:WUERFEL6_Verheftungen_des_Tesseraktes_zum_4-Torus.png** *Quelle:* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/53/WUERFEL6_Verheftungen_des_Tesseraktes_zum_4-Torus.png *Lizenz:* CC-BY-SA-3.0 *Autoren:* Eigenes Werk *Originalkünstler:* Benutzer:Karl Bednarik (Original)
- **Datei:Wiktfavicon_en.svg** *Quelle:* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c3/Wiktfavicon_en.svg *Lizenz:* CC-BY-SA-3.0 *Autoren:* ? *Originalkünstler:* ?

10.3 Inhaltslizenz

- Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0